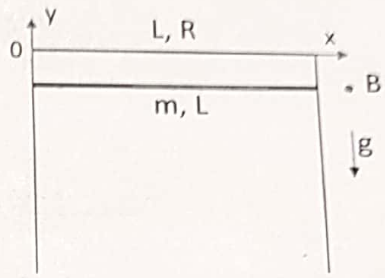
Prova scritta di Fisica 2

16.10.2019

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Si consideri una sbarretta conduttrice di lunghezza **L** e massa **m** che può scorrere senza attrito lungo due guide verticali chiuse da un tratto di resistenza ***R***. Tutte le altre resistenze del circuito sono trascurabili. Nello spazio è presente un campo di induzione magnetica **B** costante ed uniforme diretto secondo l'asse ***z***, e l'accelerazione di gravità $\overline{\boldsymbol{g}} = -g\hat{\boldsymbol{y}}$. La sbarretta viene lasciata libera con velocità v=0 dalla posizione y = 0. Calcolare:



A) la f.e.m che si genera ai capi della sbarretta. B) Scrivere l'equazione del moto della sbarretta e calcolarne la velocità a regime (quando diventa costante o dopo un tempo molto lungo) C) In queste condizioni calcolare la potenza dissipata nel circuito per effetto Joule.

Dati: m= 10 g ; L = 10 cm ; B = √5 T ; R = 5 Ω

A) $f = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(y \cdot L \cdot B) = -v_y L B$ ∴

B) Il moto della sbarretta crea la f.e.m (punto A) che genera una corrente $i = f/R$ in senso orario. Quindi la sbarretta sarà sottoposta (oltre alla forza di gravità) ad una Forza

$\bar{F} = i \bar{L} \times \bar{B} = i L B \hat{y} = v_y (LB)^2/R \ \hat{y}$

- L'equazione del moto è $m\bar{a} = m\bar{g} - \bar{v}\frac{(LB)^2}{R}$ ∴
- a regime v = costante; $\bar{F} = 0 \Rightarrow |mg| = v_\infty \frac{(LB)^2}{R}$

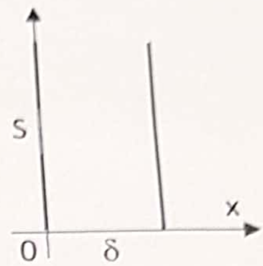
da cui $v_\infty = \frac{mgR}{(LB)^2} \simeq 10$ m/s ∴

C) $P^\infty = \frac{f^{2\infty}}{R} = \frac{v_\infty^2 (LB)^2}{R} = 1$ W ✓

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Un condensatore è costituito da due superfici piane di area S e distanza relativa δ. La costante dielettrica del materiale interno al condensatore varia con la posizione x (vedi figura): $\varepsilon_r(x) = 1 + \alpha x$. Calcolare:

A) L'espressione ed il valore della capacità del condensatore. B) L'energia elettrostatica media per unità di volume supponendo che il condensatore sia stato caricato con un carica Q.



Dati: S = 0,1 m² ; δ = 1 cm ; α = 1,7 cm⁻¹ ; Q = 3 μC

A) Il condensatore è equivalente alla serie di tanti condensatori infinitesimi dc

$$dc = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x) \frac{S}{dx} \quad ; \text{ quindi } C^{-1} = \Sigma\, dc^{-1} = \int \frac{1}{dc} =$$

$$= \int_0^{\delta} \frac{dx}{S \varepsilon_0 \varepsilon_r(x)} = \frac{1}{S \varepsilon_0 \alpha} \ln(1 + \alpha\delta) \simeq 150\,\text{pF} \therefore$$

B) $$U_{TOT} = \frac{1}{2} Q^2 / C \qquad \langle u \rangle = \frac{U_{TOT}}{S \cdot \delta} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \ln(1+\alpha\delta)}{\varepsilon_0 \alpha S \cdot S \cdot \delta}$$

$$= 30\ \text{J/m}^3$$

A) (Anche) $$E(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(x)} = \frac{Q}{S} \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(x)}$$

$$|\Delta V| = \int_0^{\delta} \bar{E}\, d\bar{x} = \frac{Q}{S \varepsilon_0 \alpha} \ln(1 + \alpha\delta)$$

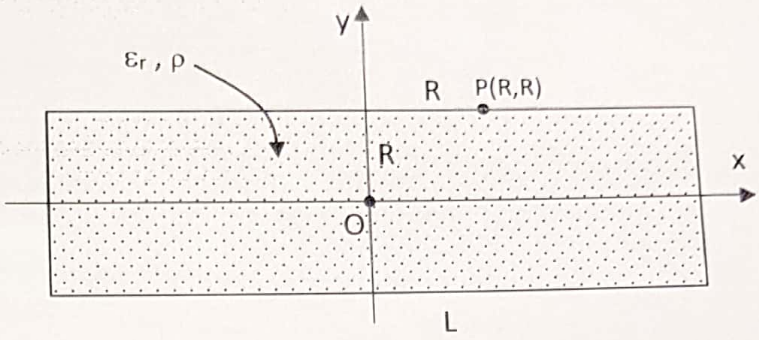
$$C = Q/\Delta V = \text{come sopra}$$

Prova scritta di Fisica 2 16.10.2019

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Si consideri un cilindro costituito di un materiale isolante di costante dielettrica relativa ε_r posto nel vuoto. Il cilindro ha una sezione circolare di raggio **R** e una lunghezza L molto maggiore del raggio R. Il materiale dielettrico interno al cilindro è caricato con una distribuzione di carica di volume uniforme **ρ > 0.**

A) Indicare il verso e la direzione del campo elettrico in tutto lo spazio. Scrivere le espressioni del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro e farne un grafico. B) Scrivere l'espressione e calcolare il valore della differenza di potenziale $\Delta V = V(O) - V(P)$ esistente fra l'origine O e il punto P(R,R)(vedi figura).



Dati: R = 4 cm ; ε_r=2 ; ρ = 2 μC/m³

A) Per simmetria il campo $\overline{E}$ è radiale con coordinata r, e direzione $\hat{r}$, quindi $\overline{E}(r) = E(r)\cdot\hat{r}$.
Il campo elettrico si può calcolare utilizzando il teorema di Gauss applicato ad un cilindro di raggio r ed altezza L con l'asse coincidente con l'asse x del cilindro.

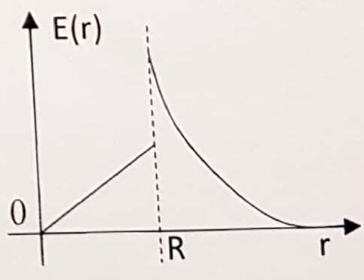
$$r \le R : \quad \int_{r,L} \overline{E}(r)\cdot\overline{dS} = \frac{Q(r,L)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad ; \quad E(r)\cdot L\cdot 2\pi r = \int_{r,L} \frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\pi r^2\cdot L \qquad \text{da cui:} \quad E(r) = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \therefore$$

$$r \ge R : \quad \int_{r,L} \overline{E}(r)\cdot\overline{dS} = \frac{Q(R,L)}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E(r)\cdot L\cdot 2\pi r = \frac{\rho\cdot\pi R^2\cdot L}{\varepsilon_0} \quad \text{da cui:} \quad E(r) = \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0 r} \quad \therefore$$

Il campo E è lineare per r≤R e scende come 1/r per r≥R, con una discontinuità in r=R

tale che $E(R^+) = \frac{\rho\, R}{2\varepsilon_0} > E(R^-) = \frac{\rho\, R}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}$.



B) La ddp fra 0 e P si può calcolare come somma della ddp fra (0,0) e Q(R,0) + la ddp fra Q(R,0) e P(R,R):

$$\Delta V(0,P) = V(0) - V(P) = \int_0^P \overline{E}(r)\cdot\overline{dl} = \cancel{\int_0^Q \overline{E}(r)\cdot\overline{dx}} + \int_Q^P \overline{E}(r)\cdot\overline{dy} = \int_Q^P E_y(y)dy =$$

$$= \int_0^R \frac{\rho\, R}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\, dr = \frac{\rho\, R^2}{4\varepsilon_r} = \frac{4}{9}\cdot 10^2 \cong 44\, V \quad \therefore$$